

文章编号: 1007- 2985(2008) 03- 0012- 02

Hamiltonian 图的弧行列式条件^{*}

徐立新, 夏东晴, 周后卿
(邵阳学院数理系, 湖南 邵阳 422000)

摘 要: 利用弧行列式得到有向图有有向 2- 因子的充分必要条件, 同时得到 n 阶有向图为 Hamiltonian 图的充分必要条件.
关键词: 有向图; 弧行列式; Hamiltonian 图
中图分类号: O157. 5 **文献标识码:** A

文献[1] 引入弧行列式来研究有向图的有向圈问题, 得到了 2 种计算有向圈的行列式方法及有向图为 Hamiltonian 图的充要条件. 在文献[1] 中得到一个基本定理:

定理 1 设 $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 则有向图 D 的弧行列式 $P(D)$ 的非零项与 D 中所有有向 n 圈(有向 Hamiltonian 圈) 中的圈一一对应. 此处弧行列式为

$$P(D) = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi} p_{1\pi(1)} p_{2\pi(2)} \cdots p_{n\pi(n)}.$$

其中: $p_{ij} = (v_i, v_j)$, 如果 (v_i, v_j) 是 D 中的弧; $p_{ij} = 0$, 如果 (v_i, v_j) 不是 D 中的弧; 而

$$p_{1\pi(1)} p_{2\pi(2)} \cdots p_{n\pi(n)} = (v_1, v_{\pi(1)})(v_2, v_{\pi(2)}) \cdots (v_n, v_{\pi(n)}),$$

$\sum_{\pi}$ 表示对 $S = \{1, 2, \dots, n\}$ 的所有 n 级排列 π 求和.

文献[1] 从定理 1 得到下面有向图 D 为 Hamiltonian 图的一个充要条件:
定理 2 有向图 D 为 Hamiltonian 图的充分必要条件是其弧行列式 $P(D)$ 不为 0.
文献[1] 中的计算有向圈的行列式想法是一种创新, 并且也是可行的, 但这 2 个重要的结论却有缺陷. 现商榷如下, 并作相应的修正.

现设 $p_{1\pi(1)} p_{2\pi(2)} \cdots p_{n\pi(n)} \neq 0$ 是 $P(D)$ 展开式任意非零项 T_{π} , π 是 S 的一个置换. 显然, 弧集 $\{v_i v_{\pi(i)} : i = 1, 2, \dots, n\}$ 导出 D 的一个生成子图 D_{π} . 将 π 分解为不相交循环的积, 则 π 等于若干对换和轮换的积(π 不一定就是一个长为 n 的轮换). π 中的每一个对换 $(i, \pi(i))$ 对应 D 中的一个长为 2 的有向圈 $(v_i, v_{\pi(i)})(v_{\pi(i)}, v_i)$; π 中的每一个长至少是 3 的轮换对应 D 中的一个长至少是 3 的有向圈. 显然, 这些圈是点不相交的, 从而生成子图 D_{π} 是由 D 的若干个点不相交的有向圈组成, 这种 D 的生成子图称为 D 的有向 2- 因子. 容易看出, D 的每一个有向 2- 因子对应 $P(D)$ 的一个非零项. 由此可以看到, 与 $P(D)$ 的非零项

^{*} 收稿日期: 2007- 12- 01
作者简介: 徐立新(1964-), 男, 湖南新宁人, 邵阳学院数理系副教授, 主要从事图论与组合优化研究.

对应的不完全是 D 的有向 Hamiltonian 圈, 而是 D 的有向 2- 因子. 这可以举例说明.

例 1 设有向图 $D = (V(D), E(D))$, 其中点集 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, 而弧集

$$E(D) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_3, v_4), (v_4, v_3)\},$$

则 D 的弧行列式为

$$P(D) = \begin{vmatrix} 0 & (v_1, v_2) & 0 & 0 \\ (v_2, v_1) & 0 & (v_2, v_3) & 0 \\ 0 & (v_3, v_2) & 0 & (v_3, v_4) \\ 0 & 0 & (v_4, v_3) & 0 \end{vmatrix} = (v_1, v_2)(v_2, v_1)(v_3, v_4)(v_4, v_3).$$

显然, 弧行列式 $P(D)$ 不为 0. 然而, $P(D)$ 的非零项 $(v_1, v_2)(v_2, v_1)(v_3, v_4)(v_4, v_3)$ 只是 D 的一个非 Hamiltonian 圈的有向 2- 因子.

- 由上述讨论可将定理 1 和定理 2 修改如下:
- 定理 3 设 $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 则有向图 D 的弧行列式 $P(D)$ 的非零项与 D 中所有有向 2- 因子一一对应.
- 定理 4 有向图 D 有有向 2- 因子的充分必要条件是其弧行列式 $P(D)$ 不为 0.
- 推论 1 n 阶的有向图 D 为 Hamiltonian 图的充分必要条件是存在弧行列式 $P(D)$ 的一个非零项 T_π , 使得置换 π 恰是一个长为 n 的轮换.

参考文献:

[1] 徐兵, 贾仁安. 有向图的行列式算法及 Hamilton 图条件 [J]. 数学的实践与认识, 2002, 32(4): 643- 650.

Arc Determinant Condition for Hamiltonian Graphs

XU Li-xin, XIA Dong-qing, ZHOU Hou-qing
(Department of Science and Information Science, Shaoyang University, Shaoyang 422000, Hunan China)

Abstract: The necessary and sufficient condition for a digraph existing directed 2-factors is put forward by introducing arc determinant; meanwhile, the necessary and sufficient condition for a n -order digraph to be a Hamiltonian graph is provided as well.

Key words: directed cycle; arc determinant; Hamiltonian digraph

(责任编辑 向阳洁)