

文章编号: 1007- 2985(2002) 01- 0029- 03

一类非齐次微分方程解的增长性

王

(山东大学数学与系统科学学院, 山东 济南 250100)

摘 要: 研究非齐次线性微分方程 $f^{(k)} - e^{Q(z)}f = 1$ ($k \geq 1$) 解的增长性, 其中 $Q(z)$ 是非常数多项式, 得出上面方程的每个解有无穷级且超级为不超过 $\deg Q$ 的正整数, 改进了已有的结果.
关键词: 微分方程; 增长级; 整函数; 超级
中图分类号: O241. 8 **文献标识码:** A

1 问题的提出

本文使用值分布理论的标准记号^[1~3]. 另外将使用记号 $\rho(f)$ 表示亚纯函数 $f(z)$ 的增长级, 用记号 $\lambda(f)$ 表示 f 的超级. 考虑微分方程

$$f^{(k)} - e^{Q(z)}f = 1 \quad (1.1)$$

的增长级问题, 其中 $Q(z)$ 是非常数多项式. 杨连中在文[4] 中证明了微分方程(1.1) 在 $Q(z)$ 是非常数多项式、 k 为正整数时的任意解 $f(z)$ 必为无穷级整函数.^[4] 对于大量的无穷级整函数解, 一个很自然的问题是: 如何更精确地估计无穷级解的增长率? 这是一个很重要的问题. 这里, 笔者引入超级定义^[5] 为

$$\lambda(f) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r}, \quad (1.2)$$

从而可以得到结论定理 1.

定理 1 设 $Q(z)$ 是非常数多项式且 $\deg Q = m$, k 为正整数, 则微分方程(1.1) 的任意解 $f(z)$ 的超级必为不大于 m 的正整数.

2 主要引理

引理 1^[6] 假设 $g(z)$ 是无穷级整函数且超级 $\lambda(g) = \lambda$, $v_g(r)$ 是 g 的中心指标, 那么

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log v_g(r)}{\log r} = \lambda. \quad (2.1)$$

引理 2 假设 $f(z)$ 是整函数且 $\rho(f) = \rho$ 和 $\lambda(f) = \lambda < +\infty$, 又假设集合 $E \subset [1, +\infty)$ 有有限对数测度, 那么存在点列 $\{Z_n = r_n e^{i\theta_n}\}$ 满足 $|f(Z_n)| = M(r_n, f)$, $\theta_n \in [0, 2\pi)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = +\infty$, $r_n \notin E$, 和对任给 $\epsilon > 0$ 及对充分大的 r_n , 存在

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log v_f(r_n)}{\log r_n} = \lambda, \quad (2.2)$$

收稿日期: 2001- 09- 04
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871050); 高校博士点基金资助项目(98042209)
作者简介: 王 (1976-), 女, 江西进贤人, 山东大学数学与系统科学学院博士研究生, 主要从事复分析方向的研究.
© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

$$\lim_n \frac{\log \log v_f(r_n)}{\log r_n} = \quad , \tag{2.3}$$

其中 $v_f(r)$ 是 $f(z)$ 的中心指标.

证明使用文[7] 中注 1 的证明方法易得.

引理 3^[7] 假设 $P(z) = (\quad + i \quad)z^n + \quad (\quad , \quad \text{是实数}, \quad | \quad | + | \quad | \quad = 0)$ 是多项式且次数 $n \geq 1, A(z)$ 是不恒为 0 的整函数且 $\lambda(A) < n$, 令 $g(z) = A(z)e^{p(z)}, z = re^{i \quad}, (p, \quad) = \cos n \quad - \sin n \quad$, 那么对于任给的 ϵ , 存在集合 $E \subset (1, + \infty)$ 具有无穷对数测度, 满足对任意 $r \in [0, 2) \setminus H_1 (H_1 = \{ \quad \in [0, 2) ; (P, \quad) = 0 \})$, $|z| = r \in [0, 1] \cap E$, 有

() 如果 $(P, \quad) > 0$, 那么
$$\exp\{(1 - \epsilon) (P, \quad) r^n\} < |g(re^{i \quad})| < \exp\{(1 + \epsilon) (P, \quad) r^n\}; \tag{2.4}$$

() 如果 $(P, \quad) < 0$, 那么
$$\exp\{(1 + \epsilon) (P, \quad) r^n\} < |g(re^{i \quad})| < \exp\{(1 - \epsilon) (P, \quad) r^n\}. \tag{2.5}$$

3 定理的证明

根据文献[4], 方程(1.1) 的所有解 $f(z)$ 都是无穷级整函数, 设 $\lambda(f) = (0 \quad + \quad)$. 由(1.1) 式有

$$\frac{f^{(k)}}{f} - e^{Q(z)} = \frac{1}{f}. \tag{3.1}$$

由 Wiman - Valiron 理论^[8-10], 有

$$\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} = \left[\frac{v_f(r)}{z} \right]^k (1 + o(1)), \tag{3.2}$$

其中 $|f(z)| = M(r, f), |z| = r \in [0, 1] \cap E_1, E_1 \subset (1, \infty)$ 有有限对数测度, $v_f(r)$ 是 f 的中心指标. 由引理 2, 存在点列 $\{Z_n = r_n e^{i \quad}\}$ 满足 $|f(z_n)| = M(r_n, f), r_n \in [0, 2), \lim_n r_n = 0 \in [0, 2), r_n \in [0, 1] \cap E_1 \cap E_2, (E_2 \text{ 如引理 3 中 } E \text{ 的意义}), r_n \quad$ 和对任给 $\epsilon > 0$ 及对充分大的 r_n , 存在

$$\lim_n \frac{\log v_f(r_n)}{\log r_n} = \quad , \tag{3.3}$$

$$\lim_n \frac{\log \log v_f(r_n)}{\log r_n} = \quad . \tag{3.4}$$

设 $Q(z) = \sum_{j=0}^m (\quad_j + i \quad_j) Z_j^j, \quad_j, \quad_j (j = 1, \quad, m)$ 均为实数, 令

$$^j(Q, \quad) = \quad_j \cos \quad_j - \quad_j \sin \quad_j \quad_j = 1, \quad, m,$$

对于 θ , 若 $^j(Q, \theta) = 0 (j = 1, \quad, m)$, 则 $\text{Re}(Q(r_n e^{i \quad})) = 0$. 注意到直线 $\arg z = \theta$ 是 $\{r_n e^{i \quad}\}$ 的渐近线, 因而存在 $M > 0$, 满足当 $n > M$ 时, 有

$$\theta - 1 < \text{Re}(Q(r_n e^{i \quad})) < \theta + 1. \tag{3.5}$$

又因为 f 是无穷级整函数, 易知 $M(r, f) \sim (r \quad)$. 由此, 将(3.2) 和(3.5) 代入(3.1), 故可知当 n 充分大时,

$$\left[\frac{v_f(r_n)}{r_n} \right]^k (1 + o(1)) \sim 2e^{\theta+1}, \tag{3.6}$$

这与(3.3) 式矛盾. 由此可知必然存在 $j_0 (1 \leq j_0 \leq m)$, 使得 $^{j_0}(Q, \theta) \neq 0$. 可以找到 j_0 使得满足 $j > j_0$ 的 j 有 $^j(Q, \theta) = 0$. 那么存在两种情形:

() $^{j_0}(Q, \theta) < 0$. 由于 $\lim_n r_n = 0$, 可知当 n 充分大时, $^{j_0}(Q, r_n) < \frac{1}{2} ^{j_0}(Q, \theta) < 0$ 且

$\text{Re}(\sum_{j=j_0+1}^m (\quad_j + i \quad_j) Z_n^j) < 1$. 将(3.2) 式代入(3.1) 式, 又由引理 3 可知对任意给定的 ϵ , 当 n 充分大时,

$$\left(\frac{v_f(r_n)}{r_n}\right)^k(1+o(1))=\exp\left\{(1-\frac{1}{2})^{j_0(Q,0)}\frac{1}{2}^{j_0(Q,0)}r_n^{j_0(Q,0)+1}\right\}.$$

由于 $j_0(Q,0)<0$, 从上式得到当 n 充分大时,

$$v_f(r_n)=o(1)r_n. \tag{3.7}$$

这与 (3.3) 式矛盾.

$(\frac{1}{2})^{j_0(Q,0)}>0$. 由于 $\lim_{n\rightarrow\infty}r_n=\infty$, 可知当 n 充分大时, $\frac{1}{2}^{j_0(Q,0)}<j_0(Q,n)<\frac{3}{2}^{j_0(Q,n)}$ 且 $\operatorname{Re}\left(\sum_{j=j_0+1}^m(j+ij)z_n^j\right)<1$ 将 (3.2) 式代入 (3.1) 式, 利用引理 2 和引理 3, 可知对任给的 ϵ , 当 n 充分大时,

$$r_n\exp\left\{\frac{1}{2k}^{j_0(Q,0)}(1-\epsilon)^{j_0(Q,0)}\right\}\leq v_f(r_n)\leq r_n\exp\left\{\frac{3}{2k}^{j_0(Q,0)}(1+\epsilon)^{j_0(Q,0)}\right\}. \tag{3.8}$$

注意到 (3.4) 式, 由 (3.8) 式可知

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{\log\log v_f(r_n)}{\log r_n}=j_0. \tag{3.9}$$

定理证毕.

参考文献:

[1] HAYMAN W. Meromorphic Function[M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.
[2] LAINE I. Nevanlinna Theory and Complex Differential Equation[M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1993.
[3] 杨 乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.
[4] YANG L Z. Solutions of a Differential Equation and Its Application[J]. Kodai Math. J., 1999, 22: 458– 464.
[5] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1995.
[6] CHEN Z X, YANG C C. Some Further Results on the Zeros and Growths of Entire Solutions of Second Order Linear Differential Equations[J]. Kodai Math. J., 1999, 22: 273– 285.
[7] 陈宗煊. 微分方程解的增长性[J]. 中国科学, 2001, 31A(9): 775– 784.
[8] HAYMAN W. The Local Growth of Power Series: a Survey of the Wiman– Valiron Method[J]. Canad Math. Bull., 1974, 17: 317– 358.
[9] 何育赞, 肖修治. 代数函数与常微分方程[M]. 北京: 科学出版社, 1988.
[10] VALIRON G. Lectures on the General Theory of Integral Functions[M]. New York: Chelsea, 1949.

The Growth of Solutions of Some Non– Homogeneous
Linear Differential Equations

WANG Jun

(Department of Math. , Shandong University, Jinan 250100, Shandong China)

Abstract: Studying the growth of solutions of where is a non– constant polynomial, the following result is obtained: any solution of the above equation is of infinite order, and its hyper order is positive integer no greater than $\deg Q$; thus improves some result given by Yang L Z.

Key words: differential equation; order; entire function; hyper order